Научни скуп "Дан Механике"

Моделирање оштећења у инжењерским материјалима методом фазног поља

Владимир Дунић

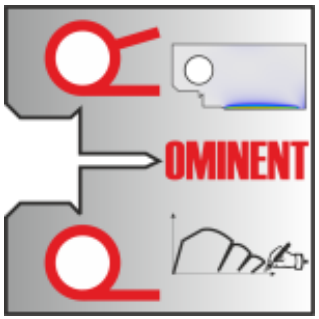
Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу

МИ САНУ, Београд, 28. фебруар 2024

Садржај

1. Увод
2. Моделирање оштећења методом фазног поља
3. Резултати симулација
4. Симулација замора са МФП
5. Закључци

Фонд за науку
Републике Србије



Истраживање спроведено уз подршку Фонда за науку Републике Србије, БРОЈ ПРОЈЕКТА 7475 **Prediction of damage evolution in engineering structures - PROMINENT**

- развој софтвера ПАК-ДАМ,
- експериментално испитивање материјала,
- тестирање и верификација,
- буџет сса 284.000е у периоду 2024-2026
- https://prominent.kg.ac.rs/

СРПСКА АКАДЕМИЈА
НАУКА И УМЕТНОСТИ

У оквиру пројекта за младе истраживаче Универзитета у Крагујевцу:
"DEEDS - DEveloping the procEdure for Damage Simulation in metallic structures due to cyclic loading"

- развој процедуре за симулацију понашања металних конструкција под цикличничним оптерећењем,
- верфикација развијене процедуре поређењем са резултатима експеримената из литературе,
- буџет 1000е у периоду 2023-2024

Препоручени прегледни радови:

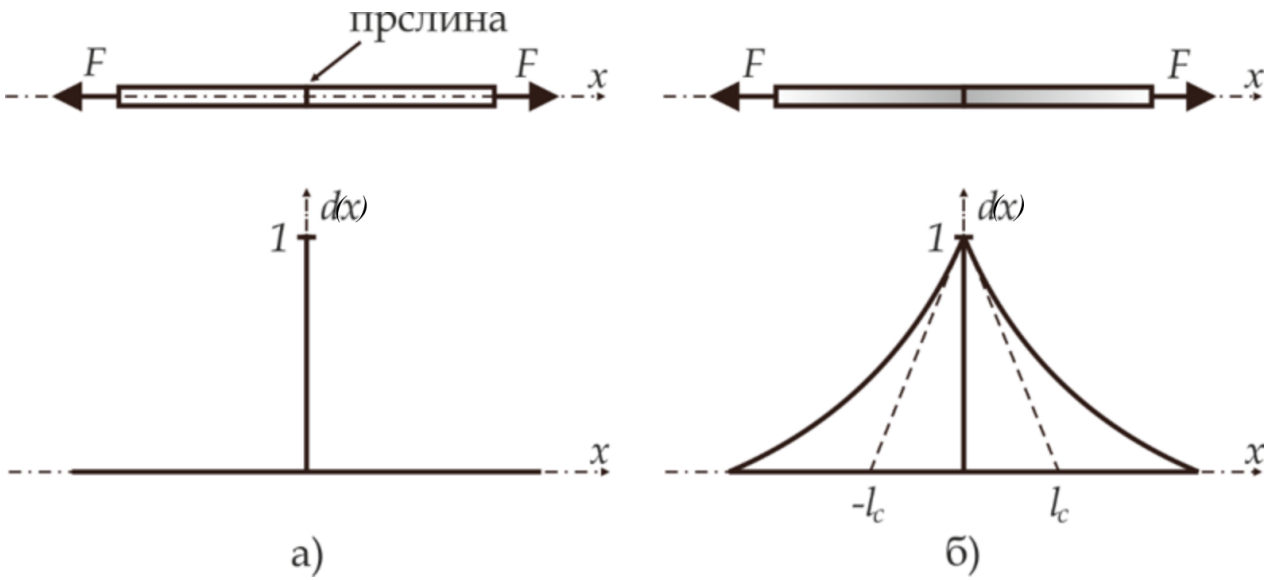
- (2018) Alessi, R., Ambati, M., Gerasimov, T., Vidoli, S., De Lorenzis, L. Comparison of Phase-Field Models of Fracture **Coupled with Plasticity**. In: Oñate, E., Peric, D., de Souza Neto, E., Chiumenti, M. (eds) Advances in Computational Plasticity. Computational Methods in Applied Sciences, vol 46. Springer, Cham
- (2020) Wu, J.-Y, Nguyen, V.P., Nguyen, C.T., Sutula, D., Sinaie, S., Bordas, S. **Chapter** One - **Phase-field modeling of fracture**. In Advances in Applied Mechanics; Bordas, S., Balint, D., Eds.; Elsevier: Amsterdam, The Netherlands; vol 53, pp. 1-183
- (2023) Li, P., Li, W., Li, B., Yang, S., Shen, Y., Wang, Q., Zhou, K. A review on phase field models for **fracture and fatigue**, Engineering Fracture Mechanics, 289, 109419
- (2023) Cui, H., Du, C., Zhang, H. Applications of Phase Field Methods in Modeling **Fatigue** Fracture and **Performance Improvement Strategies**: A Review. Metals 2023, 13, 714

Зашто метод фазног поља (МФП)?

- у последњих 10-так година МФП је доживео запажен напредак,
- функционалност МФП је валидирана за комплексне проблеме оштећења и лома и код кртих и код жилавих материјала,
- по Грифиту и Ирвину, прслина пропагира када брзина ослобађања енергије достигне критичну вредност,
- основа МФП је варијациони принцип за линеарну еластичност који су представили Франкфорт и Мариго[1] по којој није неопходно познавање инцијалне прослине, али ни путање њеног настанка, већ се може прорачунати минимизацијом потенцијалне енергије,
- оштра топологија прслине је апроксимирана размазаном зоном прслине увођењем променљиве оштећења као d у опсегу $[0, 1]$

[1] Francfort GA, Marigo J-J. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. J Mech Phys Solids 1998;46:1319–42.

Теоријске основе



Слика: Топологија прслине а) оштра и б) дифузна

Променљива фазног поља оштећења:

$$d(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases} \qquad d(x) = e^{-\frac{|x|}{l_c}} \tag{1}$$

l_c је карактеристична дужина (ширина прслине)

На основу формулације за прслине у једнодимензионалним солидима и проширења регуларизованог функционала прслине на више-димензионе проблеме[2], површина прслине је:

$$S(d) = \int_V \gamma(d, \nabla d)\, dV \tag{2}$$

где је функција густине површине прслине γ по јединици запремине

$$\gamma(d, \nabla d) = \frac{d^2}{2l_c} + \frac{l_c}{2}|\nabla d|^2 \tag{3}$$

где је ∇ набла оператор.

[2] Miehe, C., Welschinger, F., Hofacker, M. (2010), Int J Num Methods in Eng, 83, 1273-1311, doi:10.1002/nme.2861.

Површинска укупна енергија лома Φ^S на површини прслине S дефинише се као:

$$\Phi^S = \int_S G_c dS \approx \int_V G_c \gamma\left(d, \nabla d\right) dV = \int_V \varphi^S\left(d, \nabla d\right) dV \tag{4}$$

где је густина површинске енергије лома, која се расипа формирањем прслине:

$$\varphi^S\left(d, \nabla d\right) = G_c \gamma\left(d, \nabla d\right) \tag{5}$$

G_c - Грифитова критична брзина ослобађања енергије лома по јединици површине, такође позната као жилавост лома (или отпорност на лом) материјала, која се описује као количина енергије потребна за стварање јединичне површине лома.

Функција деградације

Функција деградације AT2 описује деградацију енергије услед оштећења за моделирање фазног поља оштећења:

$$g(d) = (1-d)^2 \tag{6}$$

$$g'(d) = -2(1-d) \tag{7}$$

Густина механичке енергије је:

$$\psi^M(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (g(d) + k)\psi_0^M(\boldsymbol{\varepsilon}, d) = (g(d) + k)\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{8}$$

где је $\psi_0^M(\boldsymbol{\varepsilon}, d)$ густина механичке енергије неоштећеног солида. $k \approx 0$ је мала позитивна вредност која оставља вештачку густину енергије код потпуно сломљеног материјала.

МФП за крти лом - еластичност

Густина унутрашње потенцијалне енергије $\psi(\mathbf{u}, d)$ се може посматрати као збир еластичне $\psi^E(\boldsymbol{\varepsilon}_E, d)$ и густине површинске енергије лома $\varphi^S(d, \nabla d)$:

$$\psi = \psi^E(\boldsymbol{\varepsilon}_E, d) + \varphi^S(d, \nabla d) \tag{9}$$

Укупна унутрашња потенцијална енергија W_{int} је

$$W_{int} = \int_V \psi dV = \int_V \{(g(d) + k)\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_E^T : \boldsymbol{\sigma}_0 + G_V \left[\frac{d^2}{2} + \frac{l_c^2}{2}|\nabla d|^2\right]\} dV$$

где је уведена критична брзина ослобађања енергије лома по јединици запремине као $G_V = \frac{G_c}{l_c}$.
Варијација унутрашње потенцијалне енергије:

$$\delta W_{int} = \int_V \left\{\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}_E + \frac{1}{2}g'(d)\,\boldsymbol{\varepsilon}_E^T : \boldsymbol{\sigma}_0 \delta d + G_V \left[d\delta d + l_c^2 \nabla d \nabla \delta d\right]\right\} dV \tag{10}$$

Шта је до сада још урађено?

- различите функције деградације су познате у литератури као AT1 (d) и AT2 (d^2 - стандардна),
- разматрани су изотропни али и анизотропни модели који разликују затезање и притисак у смислу настанка оштећења,
- поред AT1 и AT2 за крте материјале, предложено је и унифициран модел, али и функција која се може применити на кохезивне материјале (PF-CZM),
- нумеричка имплементација овог приступа је најчешћа у МКЕ, али су могуће и безмрежне методе, изогеометријска анализа, перидинамика,
- примењени су монолитни или наизменични (staggered) солвери у различитим МКЕ софтверима: Abaqus, COMSOL, FEniCS, и MOOSE
- уситњавање мреже, вишескално моделирање, унапређење ефикасности, нови солвери, нумеричка стабилност и тачност[3]

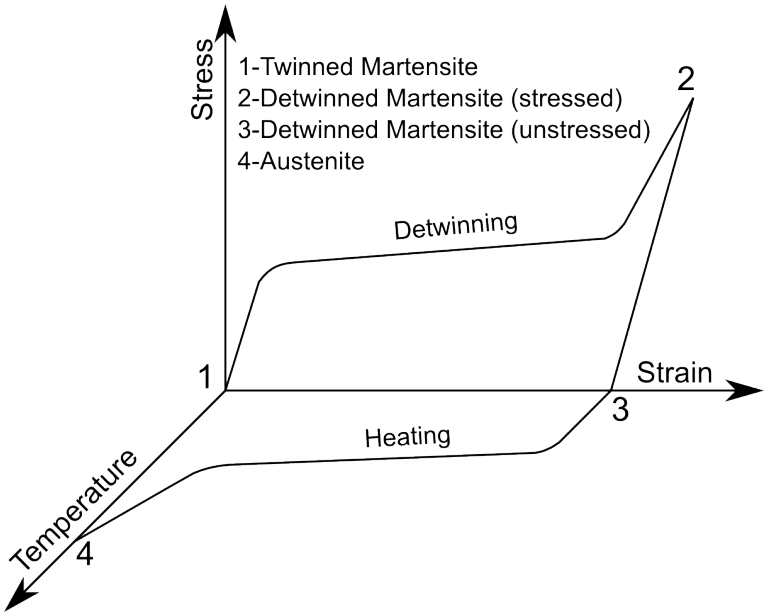
[3] Li et al, A review on phase field models for fracture and fatigue, Engineering Fracture Mechanics, 289, 2023, 10.1016/j.engfracmech.2023.109419.

Моделирање паметних легура (SMA)

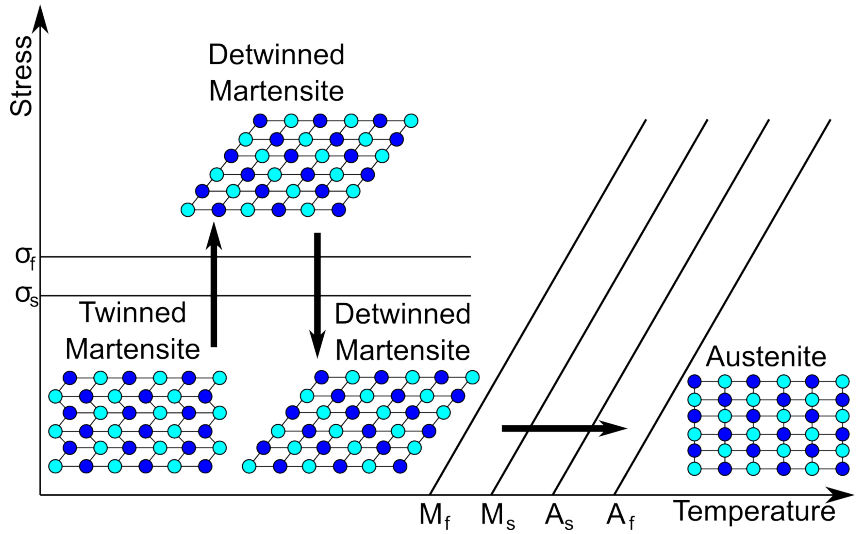
- Са ментором проф. Р. Славковићем:
  - Модификован је модел проф. Лагудаса за легуре са својством памћења облика (Shape Memory Alloyts - SMA) (интеграција напона зависи од еквивалентног напона и деформације),
  - Развијена је теорија за велике деформације за SMA конститутивни модел,
- Са проф. Бојаном Росић и проф. Херманом Матисом са ТУ Брауншвајг, Немачка (у оквиру ДААД пројекта):
  - Имплементирана термо-механичка спрега за софтвер ПАК коришћењем CTL библиотеке за симулацију понашања SMA при различитим брзинама оптерећења,
- Са коментором проф. Елзбета Пиечиска са IPPT, PAN, Пољска: Анализирани су експериментални резултати са Аичи технолошког института, Тојота, Јапан, и са IPPT, PAN, Пољска, идентификовани су материјални параметри за модел и поређени су резултати симулација у контроли напона и деформација, ефекат релаксације напона у SMA и утицај брзине оптерећења на промену температуре у узорцима.

Фазни дијаграм напон-температура за две фазе:

- Мартензит (упарен, неупарен) - ниске температуре
- Аустенит - високе температуре

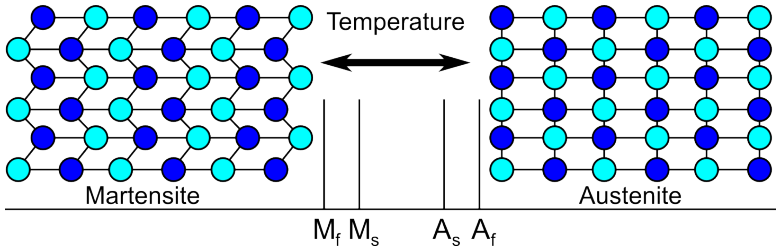


(а) Дијаграм ефекта памћења облика[4]

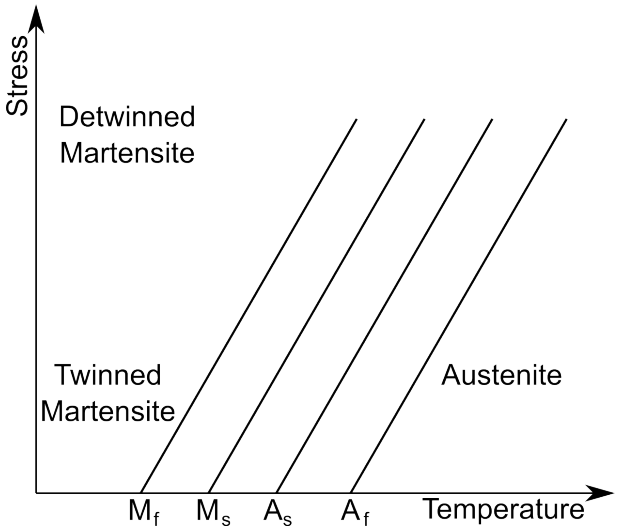


(б) Ефекат памћења облика-микроструктура[4]

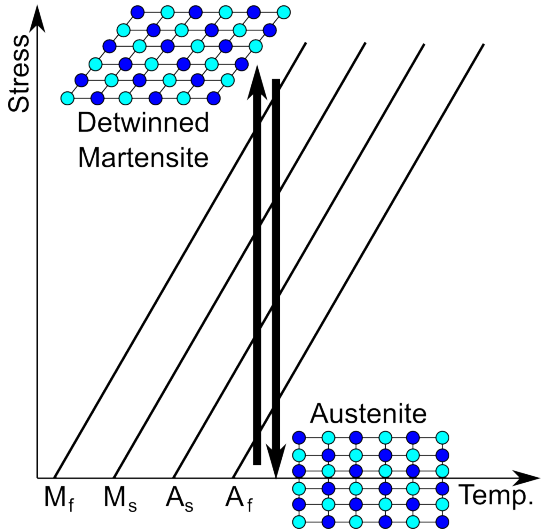
[4] Lagoudas, Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications. Springer, 2010



(а) Мартензитна трансформација изазвана променом температуре[5]



(б) Температуре трансформације[4]



(в) Псеудоеластичност[4]

[4] Lagoudas, Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications. Springer, 2010

Конститутивни модел за SMA

- Унутрашња променљива: удео мартензита у запремини ξ.
- Основни облик Гибсове слободне енергије [4]:

$$g(\boldsymbol{\sigma}, T) = -\frac{1}{2\rho}\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{M} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\alpha}(T - T_0) + c\left[(T - T_0) - T\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right] - s_0 T + u_0, \tag{11}$$

- Клаузијус-Планкова неједнакост[4]:

$$\left(-\rho\frac{\partial g}{\partial \mathbf{e}_{tr}}\right) : \dot{\mathbf{e}}_{tr} + \left(-\rho\frac{\partial g}{\partial \xi}\right)\dot{\xi} \geq 0. \tag{12}$$

c је специфична топлота,
s_0 је специфична ентропија,
u_0 је специфична унутрашња енергија.

[4] Lagoudas, Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications. Springer, 2010

Претпоставка (Lagoudas, Boyd, Qidwai)[4]

Свака промена у текућој микроструктури материјала је стриктно резултат промене у удеалу мартензита у запремини.

Брзина деформације мартензитне трансформације:

$$\dot{\mathbf{e}_{tr}} = H\boldsymbol{n}_{tr}\dot{\xi}. \tag{13}$$

у правцу тензора мартензитне трансформације:

$$\boldsymbol{n}_{tr} = \begin{cases} \frac{3}{2}\frac{\mathbf{S}'}{\overline{S}}; & \dot{\xi} > 0 \\ \frac{\mathbf{e}_{tr}}{\overline{e}_{tr}}; & \dot{\xi} < 0 \end{cases}, \tag{14}$$

Гибсова слободна енергија која зависи од $\mathbf{e}_{tr}$ и ξ:

$$\begin{aligned} g\left(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi, \mathbf{e}_{tr}\right) = -\frac{1}{2\rho}\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{M} : \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{\rho}\boldsymbol{\sigma} : [\boldsymbol{\alpha}(T - T_0) + \mathbf{e}_{tr}] + \\ c\left[(T - T_0) - T\ln(\frac{T}{T_0})\right] - s_0 T + u_0 + \frac{1}{\rho}f(\xi) \end{aligned} \tag{15}$$

[4] Lagoudas, Shape Memory Alloys: Modeling and Engineering Applications. Springer, 2010

- Клаузијус-Планкова неједнакост:

$$\left(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{n}_{tr} H - \rho \frac{\partial g}{\partial \xi}\right) \dot{\xi} = \Pi \dot{\xi} \geq 0 \tag{16}$$

- Експлицитни развој термодинамичке силе:

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi) = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{n}_{tr} H + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \Delta \mathcal{M} : \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\alpha} \left(T - T_0\right) - \\ \rho \Delta c \left[\left(T - T_0\right) - T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right)\right] + \rho \Delta s_0 T - \rho \Delta u_0 - \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}, \end{aligned} \tag{17}$$

- Функција мартензитне трансформације:

$$\Phi = \begin{cases} \Pi - Y; & \dot{\xi} > 0 \\ -\Pi - Y & \dot{\xi} < 0 \end{cases} \tag{18}$$

Реформулисана функција мартензитне фазне трансформације, тако да зависи само од скаларних величина - еквивалентни напон и деформација[5]:

$$\Phi = \begin{cases} H\overline{S} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overline{S}^2\left(\frac{1}{G^M} - \frac{1}{G^A}\right) + 3{\sigma_m}^2\left(\frac{1}{{c_m}^M} - \frac{1}{{c_m}^A}\right)\right) + 3\sigma_m\left(\alpha^M - \alpha^A\right)\Delta T + \\ \rho\Delta s_0\left(T - M_s\right) - \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}; \qquad \dot{\xi} > 0 \\ \\ -\mathbf{S}'_* : {}^t\mathbf{e}_{tr}\frac{H}{{}^t\overline{e}_{tr}} + 3G\Delta\xi H^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overline{S}^2\left(\frac{1}{G^M} - \frac{1}{G^A}\right) + 3{\sigma_m}^2\left(\frac{1}{{c_m}^M} - \frac{1}{{c_m}^A}\right)\right) - \\ 3\sigma_m\left(\alpha^M - \alpha^A\right)\Delta T - \rho\Delta s_0\left(T - A_f\right) + \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi}; \qquad \dot{\xi} < 0 \end{cases} \tag{19}$$

[5] В.Дунић, Развој и имплементација термо-механичког конститутивног модела за нумеричку анализу понашања материјала са својством памћења облика, Докторска дисертација, Факултет инжењерских наука Универзитет у Крагујевцу, 2015.

МФП за паметне легуре (SMA)

Густина унутрашње потенцијалне енергије ψ се може посматрати као збир механичке $\psi^M(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi, d)$, термичке $\psi^{th}(T, \xi)$, и густине површинске енергије лома $\varphi^S(d)$:

$$\psi = \psi^M(\boldsymbol{\varepsilon}, \xi, d) + \psi^{th}(T, \xi) + \varphi^S(d, \xi) \tag{20}$$

где је ε тензор укупне механичке деформације којег чине еластични, термички и део који потиче од мартензитне трансформације:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^{th} + \boldsymbol{\varepsilon}^{tr} \tag{21}$$

а ξ је удео мартензита у запремини код SMA, T је температура.

Укупна унутрашња потенцијална енергија W_{int} за псеуоделастичност и изотермалне граничне услове је

$$W_{int} = \int_V \psi dV = \int_V \{g(d)\,\boldsymbol{\sigma}_0(\xi) : \boldsymbol{\varepsilon} + G_V \left[\frac{d^2}{2} + \frac{l_c^2}{2}|\nabla d|^2\right]\} dV$$

Варијација унутрашње потенцијалне енергије по укупној деформацији и оштећењу је дата као

$$\delta W_{int} = \int_V \left(\frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\partial \psi}{\partial d} : \delta d\right) dV \tag{22}$$

$$\delta W_{int} = \int_V \{\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} g'(d)\,\boldsymbol{\varepsilon}^T : \boldsymbol{\sigma}_0(\xi)\delta d + G_V \left[d\delta d + l_c^2 \nabla d \nabla \delta d\right]\} dV \tag{23}$$

Варијација спољашње потенцијалне енергије W_{ext}:

$$\delta W_{ext} = \int_V \mathbf{b} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_A \mathbf{h} \cdot \delta \mathbf{u} dA \tag{24}$$

где је $\mathbf{b}$ поље запреминских сила по јединици запремине, $\mathbf{h}$ је поље површинских сила по јединици површине, и $\mathbf{u}$ је вектор померања. Равнотежа унутрашње и спољашње потенцијалне енергије

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \tag{25}$$

и применом извода и коришћењем Гаусове (Gauss) теореме:

$$\int_V \left\{ - \left[g'(d)\, \psi_0(\xi) + G_V \left[d - l_c^2 \nabla^2 d \right] \right] \delta d - \left[Div\left[\boldsymbol{\sigma}\right] + \mathbf{b} \right] \cdot \delta \mathbf{u} \right\} dV$$

$$+ \int_A \left\{ \left[\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{h} \right] \cdot \delta \mathbf{u} \right\} dA + \int_A \left\{ \left[G_V l_c^2 \nabla d \cdot \mathbf{n} \right] \delta d \right\} dA = 0$$

где је $\mathbf{n}$ јединични вектор нормале на површину A.

Увођењем граничних услова Neumann-овог типа

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{h} = 0 \tag{26}$$

$$\nabla d \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{27}$$

добијамо равнотежну једначину

$$Div\left[\boldsymbol{\sigma}(\xi)\right] + \mathbf{b} = 0 \tag{28}$$

и закон еволуције фазног поља оштећења

$$G_V\left[d - l_c^2 \nabla^2 d\right] + g'(d)\,\psi_0(\xi) = 0 \tag{29}$$

МФП за жилав лом - пластичност

Густина унутрашње потенцијалне енергије ψ за жилав лом се посматра као збир густине енергије еластичности $\psi^E(\boldsymbol{\varepsilon}_E, d)$, пластичности $\psi^P(\bar{\varepsilon}_P)$, густине расуте енергије пластичности $\varphi^P(\bar{\varepsilon}_P)$, густине површинске енергије лома $\varphi^S(d, \nabla d)$:

$$\psi = \psi^E(\boldsymbol{\varepsilon}_E, d) + \psi^P(\bar{\varepsilon}_P) + \varphi^P(\bar{\varepsilon}_P) + \varphi^S(d, \nabla d) \tag{30}$$

Функционал укупне унутрашње потенцијалне енергије W_{int} је:

$$W_{int} = \int_V \psi dV = \int_V \{g(d)\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_E^T : \boldsymbol{\sigma}_0 + \psi^P(\bar{\varepsilon}_P) + G_V\left[\frac{d^2}{2} + \frac{l_c^2}{2}|\nabla d|^2\right] + \sigma_{uv}\bar{\varepsilon}_P\}dV$$

Варијација унутрашње потенцијалне енергије:

$$\delta W_{int} = \int_V \left\{\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}_E + \frac{1}{2}g'(d)\,\boldsymbol{\varepsilon}_E^T : \boldsymbol{\sigma}_0\delta d + f(\bar{\alpha})\,G_V\left[d\delta d + l_c^2\nabla d\nabla\delta d\right] + \right.$$
$$\left. + \left(-\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_P}{\partial\bar{\varepsilon}_P} + (\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv})\left(1 - e^{-n\bar{\varepsilon}_P}\right) + H\bar{\varepsilon}_P + \sigma_{yv}\right)\delta\bar{\varepsilon}_P\right\}dV$$

Равнотежа варијације унутрашње и спољашње потенцијалне енергије:

$$\int_V \left\{ -\left[g'(d)\,\psi_0 + G_V\left[d - l_c^2\nabla^2 d \right] \right] \delta d - \left[Div\left[\boldsymbol{\sigma}\right] + \mathbf{b} \right] \cdot \delta\mathbf{u} + \right.$$

$$\left. + \left(-\boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_P}{\partial \bar{\varepsilon}_P} + \left(\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv}\right)\left(1 - e^{-n\bar{\varepsilon}_P}\right) + H\bar{\varepsilon}_P + \sigma_{yv} \right) \delta\bar{\varepsilon}_P \right\} dV$$

$$+ \int_A \left\{ \left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} - \mathbf{h} \right] \cdot \delta\mathbf{u} \right\} dA + \int_A \left\{ \left[G_V l_c^2 \nabla d \cdot \mathbf{n} \right] \delta d \right\} dA = 0$$

добијамо равнотежну једначину,

$$Div\left[\boldsymbol{\sigma}\right] + \mathbf{b} = 0 \tag{31}$$

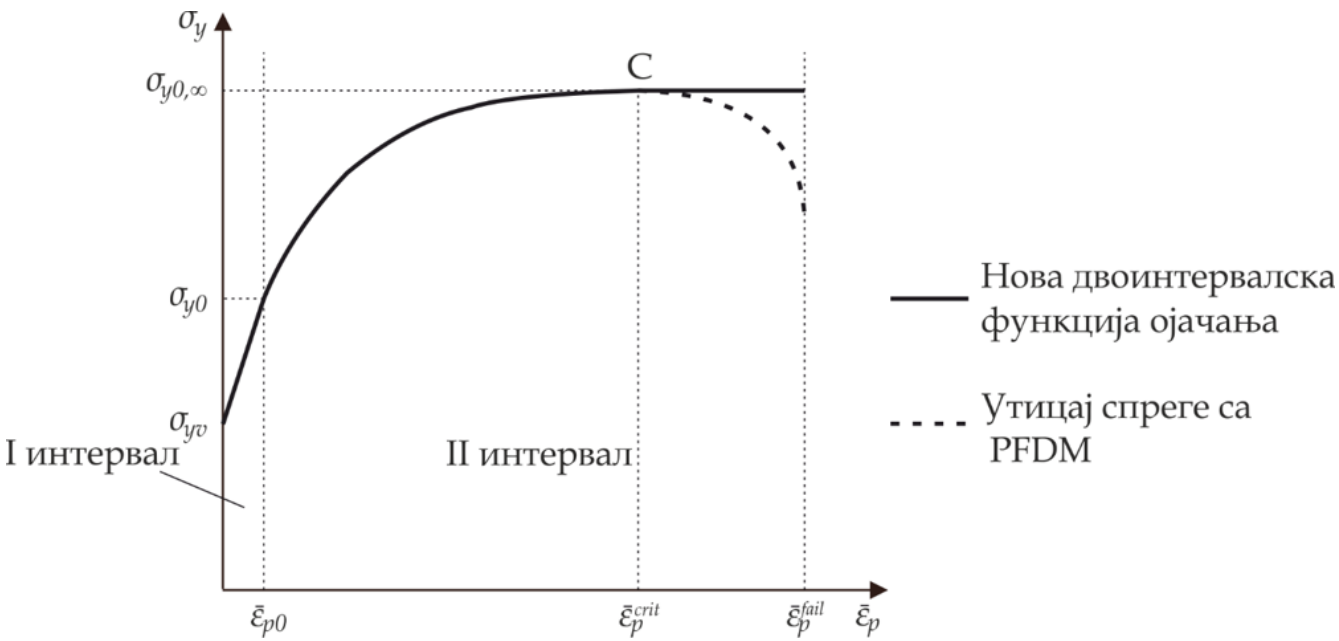
закон еволуције фазног поља оштећења,

$$G_V\left[d - l_c^2\nabla^2 d \right] + g'(d)\,\psi_0 = 0 \tag{32}$$

и закон пластичног течења

$$\bar{\sigma}_{eq} - \sigma_{yv} - \left(\sigma_{y0,\infty} - \sigma_{yv}\right)\left(1 - e^{-n\bar{\varepsilon}_P}\right) - H\bar{\varepsilon}_P = 0 \tag{33}$$

У раду[6] је представљена нова двоинтервалска функција ојачања, која се може користити за материјале који након границе течења имају линеарно ојачање или перфектну пластичност, након чега следи Симова функција ојачања.



Слика: Двоинтервалска функција ојачања

[6] Dunic, V., Zivkovic, J., Milovanovic, V., Pavlovic, A., Radovanovic, A., Zivkovic, M. (2021) Two-Intervals Hardening Function in a Phase-Field Damage Model for the Simulation of Aluminum Alloy Ductile Behavior. Metals, vol 11(11), pp. 1685

Функција деградације за пластичност

Функција деградације за пластичност према[7] за моделирање фазног поља оштећења:

$$g(d) = (1-d)^{2p} \tag{34}$$

$$g'(d) = -2p(1-d)^{2p-1} \tag{35}$$

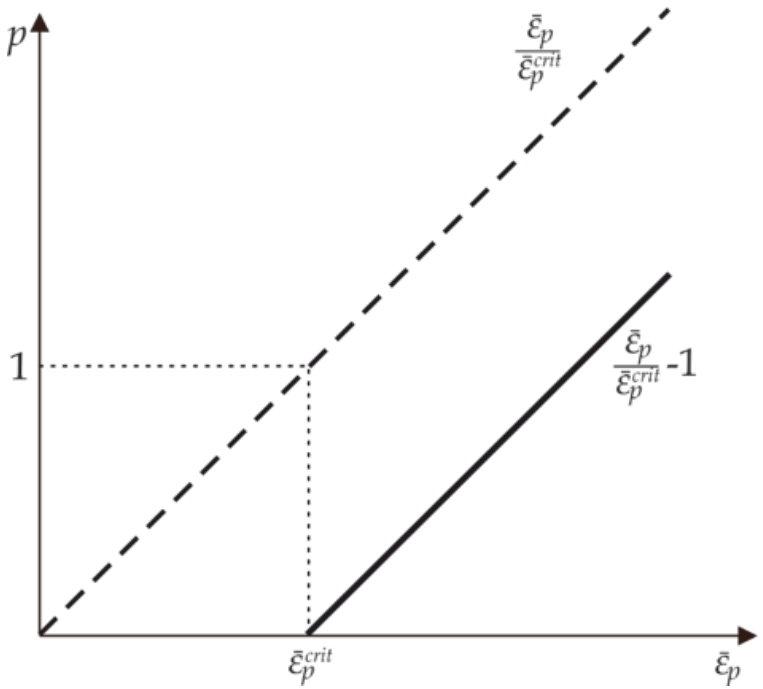
где за крти лом треба користити да је променљива спрезања оштећења и пластичности $p = 1$.
У раду[8] је представљена модификована променљива спрезања оштећења и пластичности:

$$p = \begin{cases} 0 & ; \frac{\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_p^{crit}} < 1 \\ \frac{\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_p^{crit}} - 1 & ; \frac{\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_p^{crit}} \geq 1 \end{cases} \tag{36}$$

[12] Ambati, M., Gerasimov, T. De Lorenzis, L. Phase-field modeling of ductile fracture. Comput Mech 55, 1017–1040 (2015).

[13] Zivkovic, J., Dunic, V., Milovanovic, V., Pavlovic, A., Zivkovic, M. (2021) A Modified Phase-Field Damage Model for Metal Plasticity at Finite Strains: Numerical Development and Experimental Validation. Metals, 11(1), 47

Модификована функција деградације



Слика: Нова променљива спрезања p (континуална линија) у поређењу са [13]

[13] Zivkovic, J., Dunic, V., Milovanovic, V., Pavlovic, A., Zivkovic, M. (2021) A Modified Phase-Field Damage Model for Metal Plasticity at Finite Strains: Numerical Development and Experimental Validation. Metals, 11(1), 47

Имплементација МФП

Груписањем чланова у једначини равнотеже унутрашње и спољашње потенцијалне енергије:

$$\int_V g(d)\,\sigma_0 : \delta\varepsilon dV = \int_V \mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{u}dV + \int_A \mathbf{h}\cdot\delta\mathbf{u}dA \tag{37}$$

$$\int_V \left\{ g'(d)\,\psi_0\delta d + G_V\left[d\delta d + l_c^2\nabla d\cdot\nabla\delta d \right] \right\} dV = 0 \tag{38}$$

Вектор померања у интеграционој тачки је:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}^u \mathbf{U} \tag{39}$$

где је $\mathbf{N}^u$ матрица интерполационих функција за померања у чворовима коначног елемента у вектору $\mathbf{U}$.
Вектор укупних деформација $\boldsymbol{\varepsilon}$ се интерполира у функцији чворних померања $\mathbf{U}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}^u \mathbf{U} \tag{40}$$

Фазно поља оштећења у интеграционој тачки је:

$$d = \mathbf{N}^d \mathbf{d} \tag{41}$$

где је d вектор фазног поља оштећења у чворовима. Локални градијент оштећења који се још назива и "деформација оштећења"је

$$\varepsilon^d = \nabla d = \mathbf{B}^d \mathbf{d} \tag{42}$$

Варијација поља померања $\delta\mathbf{u}$ и варијација поља оштећења δd су:

$$\delta\mathbf{u} = \mathbf{N}^u \delta\mathbf{U} \tag{43}$$

$$\delta d = \mathbf{N}^d \delta\mathbf{d} \tag{44}$$

Варијација малих деформација $\delta\varepsilon$ и варијација градијента оштећења $\nabla\delta d$ су:

$$\delta\varepsilon = \mathbf{B}^u \delta\mathbf{U} \tag{45}$$

$$\nabla\delta d = \mathbf{B}^d \delta\mathbf{d} \tag{46}$$

Сменом у груписане једначине добија се:

$$\delta \mathbf{U} \left(\mathbf{F}^u - \mathbf{R} \right) = 0 \tag{47}$$

$$\delta \mathbf{d}^T \mathbf{F}^d = 0 \tag{48}$$

где је $\mathbf{F}^u$ вектор унутрашњих сила у чворовима, $\mathbf{R}$ вектор спољашњих сила у чворовима, и $\mathbf{F}^d$ је део унутрашње потенцијалне енергије повезан са оштећењем у чворовима.

За произвољну варијацију вектора померања $\delta\mathbf{U}$ и оштећења $\delta\mathbf{d}$ у чворовима, равнотежне једначине коначних елемената су:

$$\mathbf{F}^u = \mathbf{R} \tag{49}$$

$$\mathbf{F}^d = \mathbf{0} \tag{50}$$

односно,

$$\int_V g(d)\,\mathbf{B}^{uT}\sigma_0 dV = \int_V \mathbf{N}^{uT}\mathbf{b}dV + \int_A \mathbf{N}^{uT}\mathbf{h}dA \tag{51}$$

$$\int_V \left\{\mathbf{N}^{dT} g'(d)\,\psi_0 + G_V\left[\mathbf{N}^{dT} d + \mathbf{B}^{dT} l_c^2 \nabla d\right]\right\} dV = \mathbf{0} \tag{52}$$

Претходне једначине су нелинеарне функције померања и оштећења па се морају решавати инкрементално. Применом Њутн-Рапсонове итеративне процедуре за решавање система нелинеарних једначина добијамо:

$$\begin{bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{uu(i-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{dd(i-1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{U}^{(i)} \\ \Delta\mathbf{d}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{u(i-1)} \\ -{}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{d(i-1)} \end{Bmatrix} \tag{53}$$

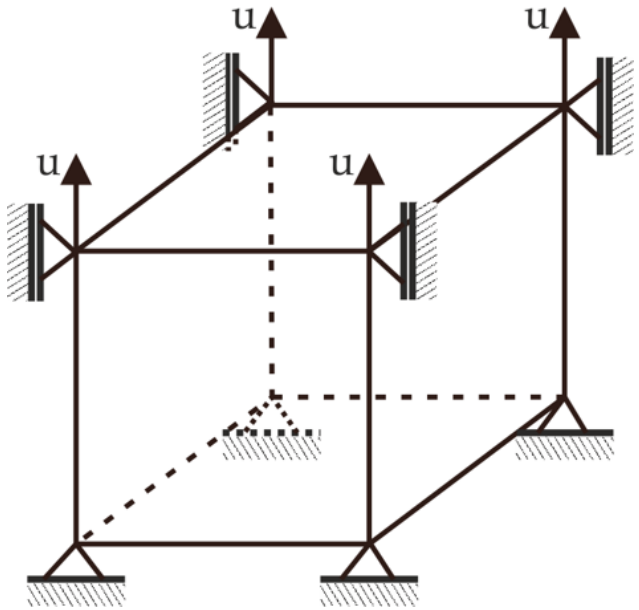
где је (i) индекс који означава број итерације. После сваке итерације, укупно померање и оштећење су:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)} \tag{54}$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{d}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{d}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{d}^{(i)} \tag{55}$$

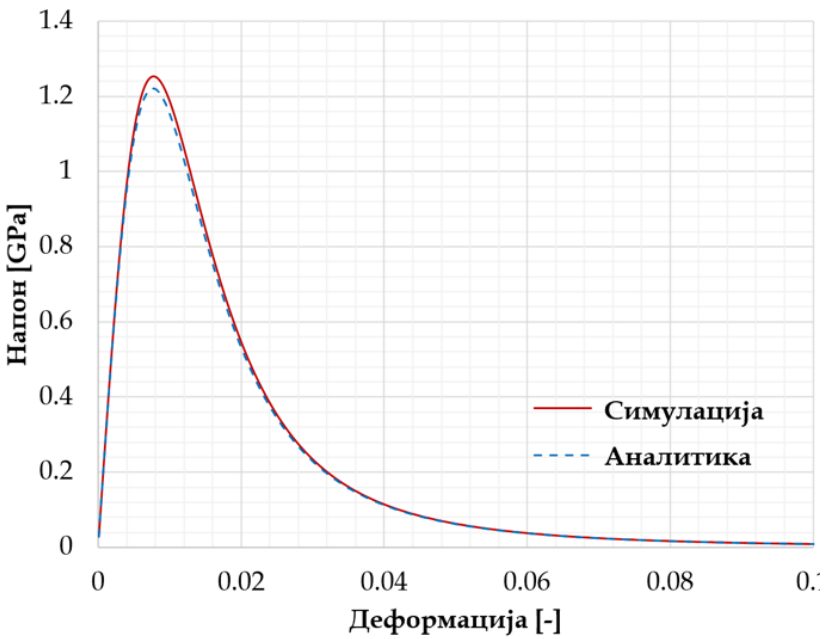
Верификациони пример - крти лом

Пример из литературе[9] којим се верификује имплементација методе фазног поља.

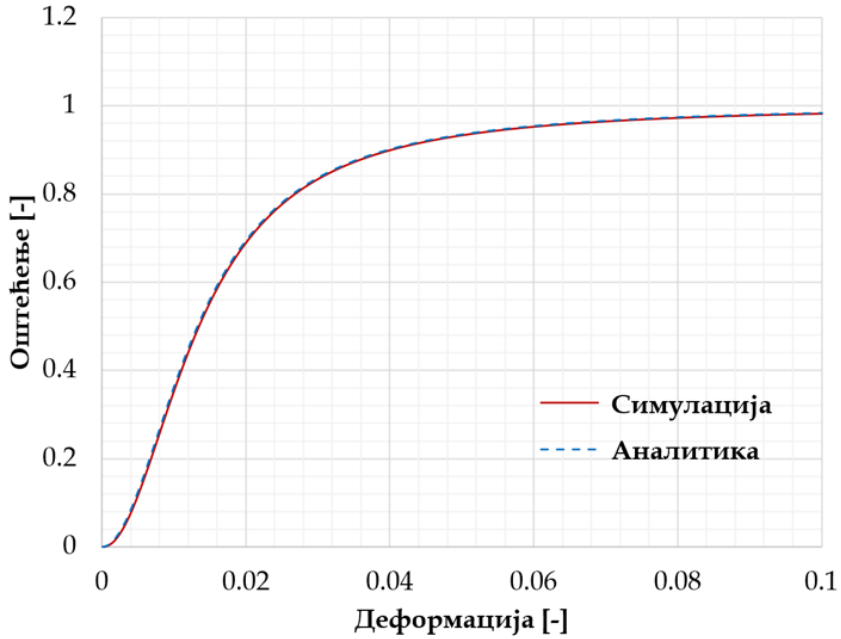


Слика: Верификациони пример са једним елементом - гранични услови

[9] Molnar, G., Gravouil, A. (2017) 2D and 3D Abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture. Finite Elements in Analysis and Design, vol 130, pp. 27-38



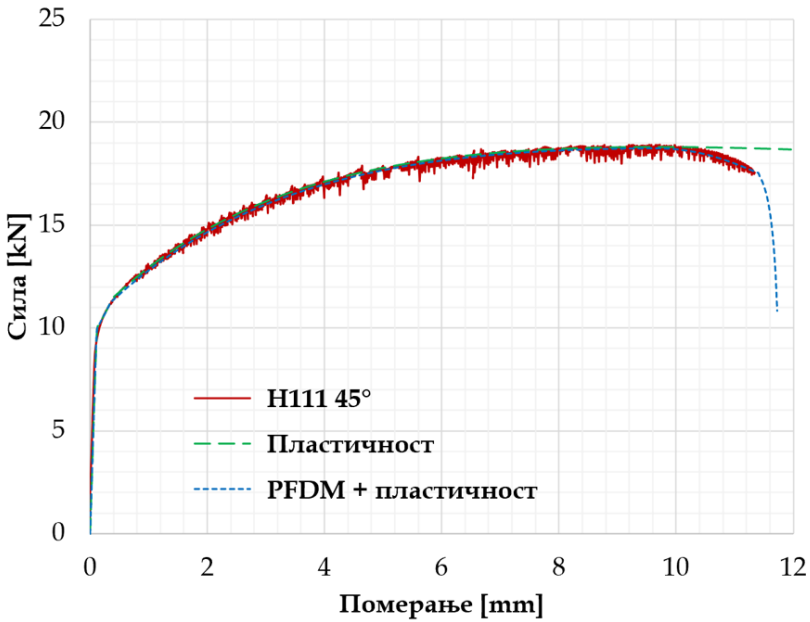
(а) Напон-деформација



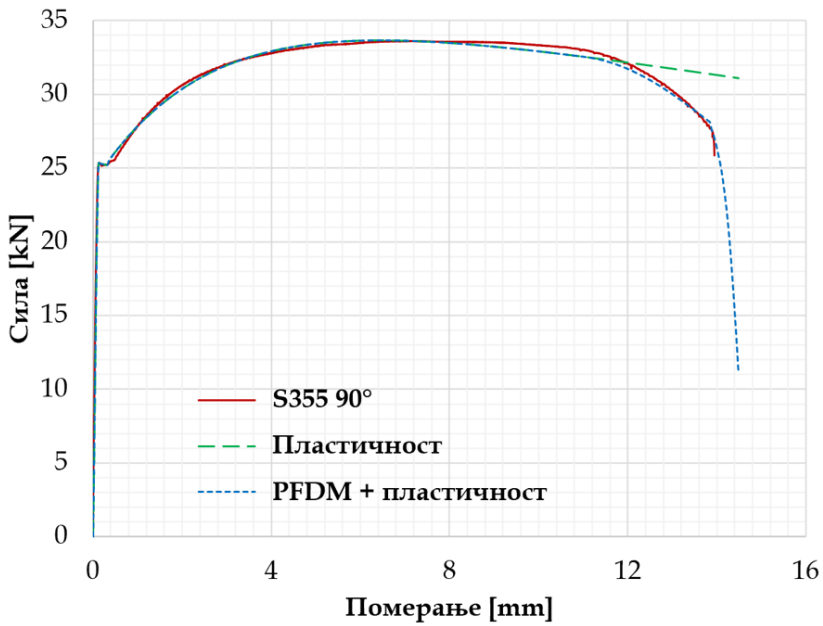
(б) Оштећење - деформација

Метали (челик и алуминијум)

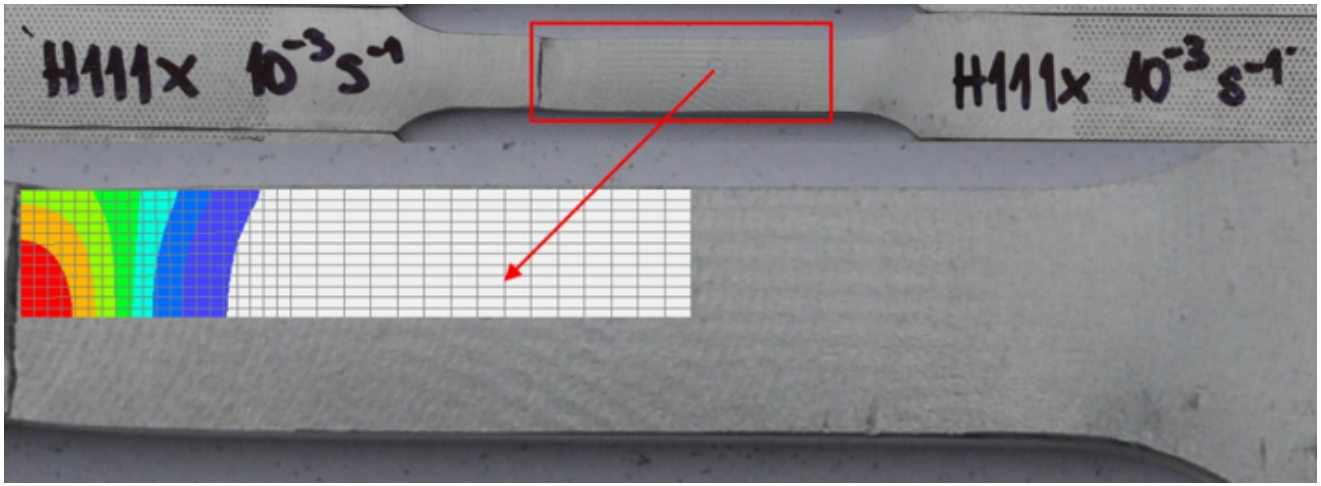
Стандардне епрувете од челика и алуминијума су експериментално испитане на затезање и резултати су приказани у поређењу са симулацијама методом фазног поља:



(а) Алуминијум H111

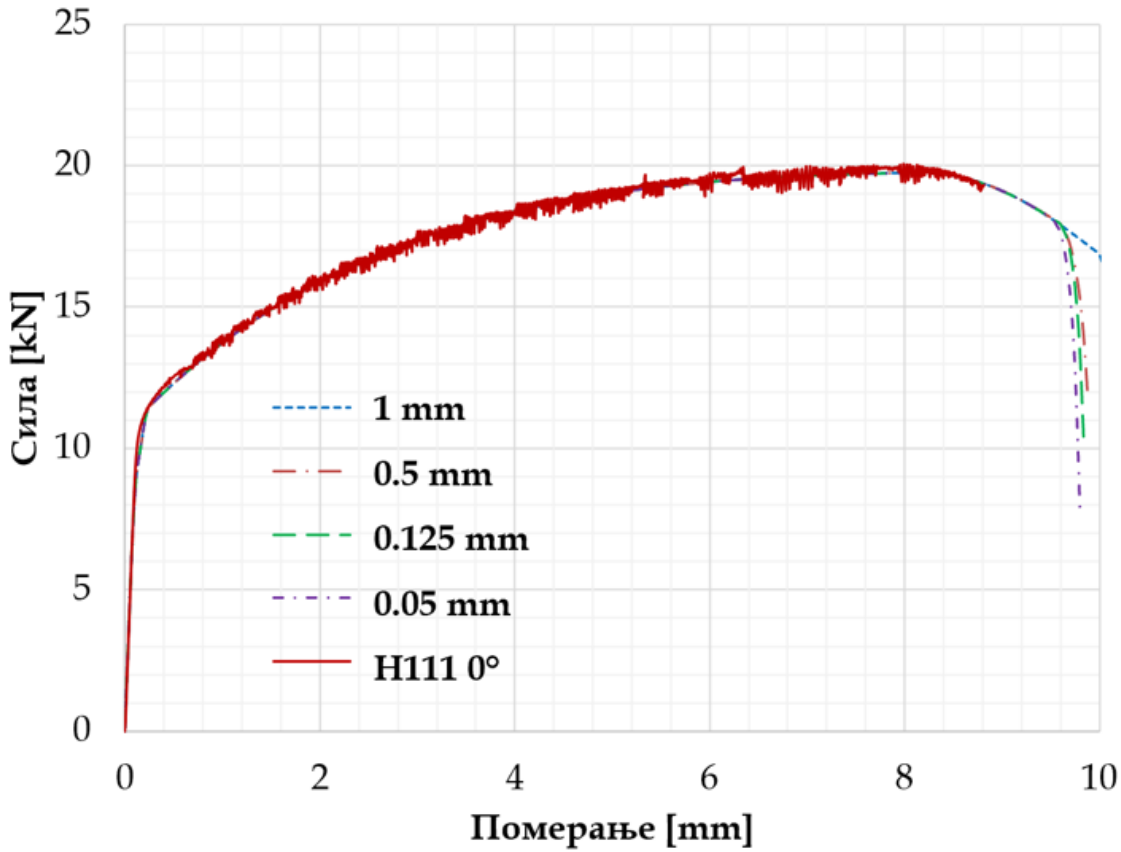


(б) Челик S355

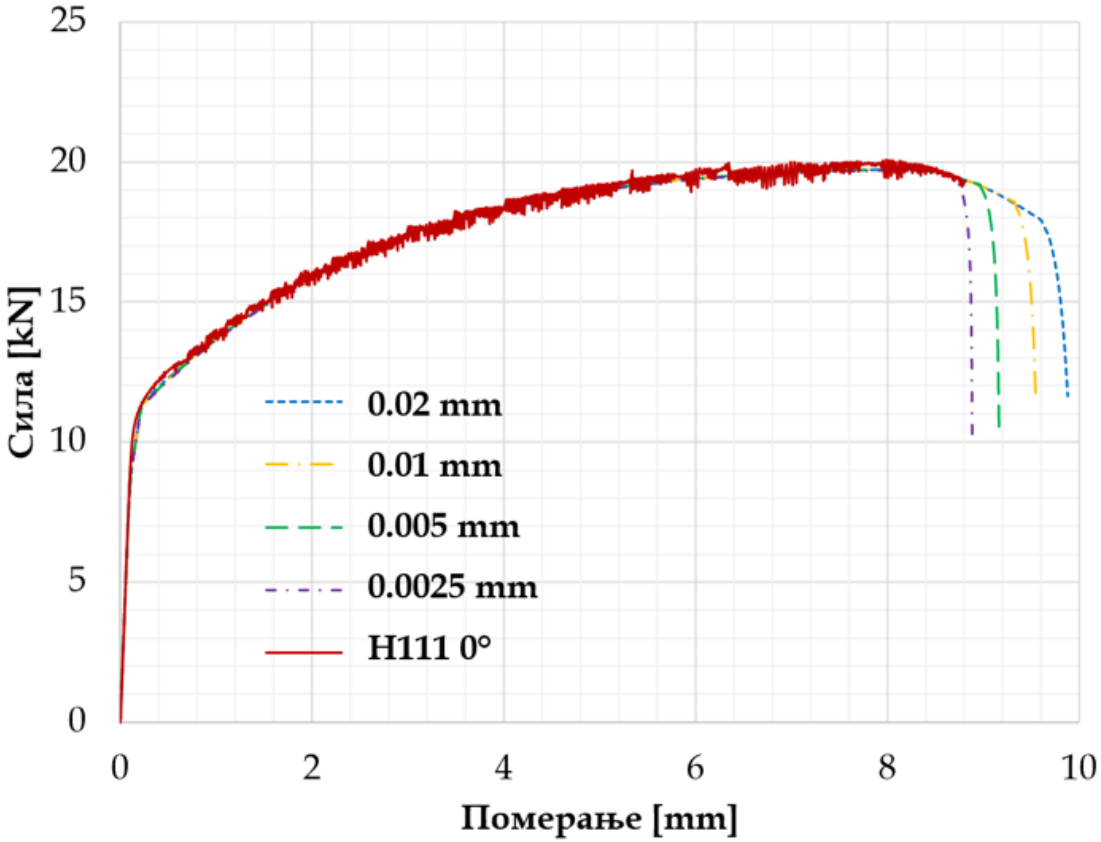


Слика: Поређење деформисане конфигурације алуминијумске епрувете H111 и МФП симулације са приказаним пољем оштећења

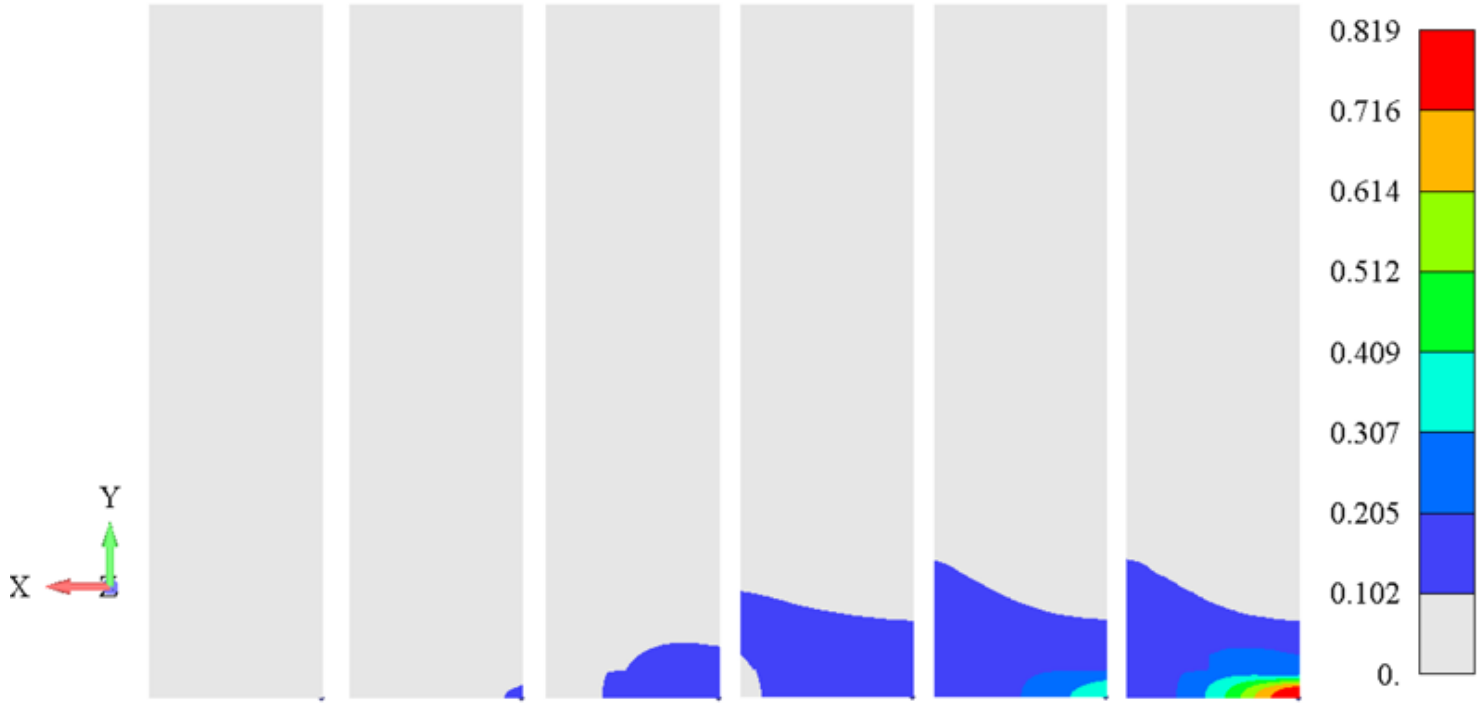
[11] Zivkovic, J., Dunic, V., Milovanovic, V., Pavlovic, A., Zivkovic, M. (2021) A Modified Phase-Field Damage Model for Metal Plasticity at Finite Strains: Numerical Development and Experimental Validation. Metals vol 11(1), pp. 47



Слика: Утицај величине мреже на одзив сила - померање



Слика: Анализа осетљивости на различите величине корака задатог померања



Слика: Развој фазног поља оштећења d у посткритичној зони са покретним интерфејсом за померање горње површине епрувете H111 за најситнију мрежу

SENB узорак

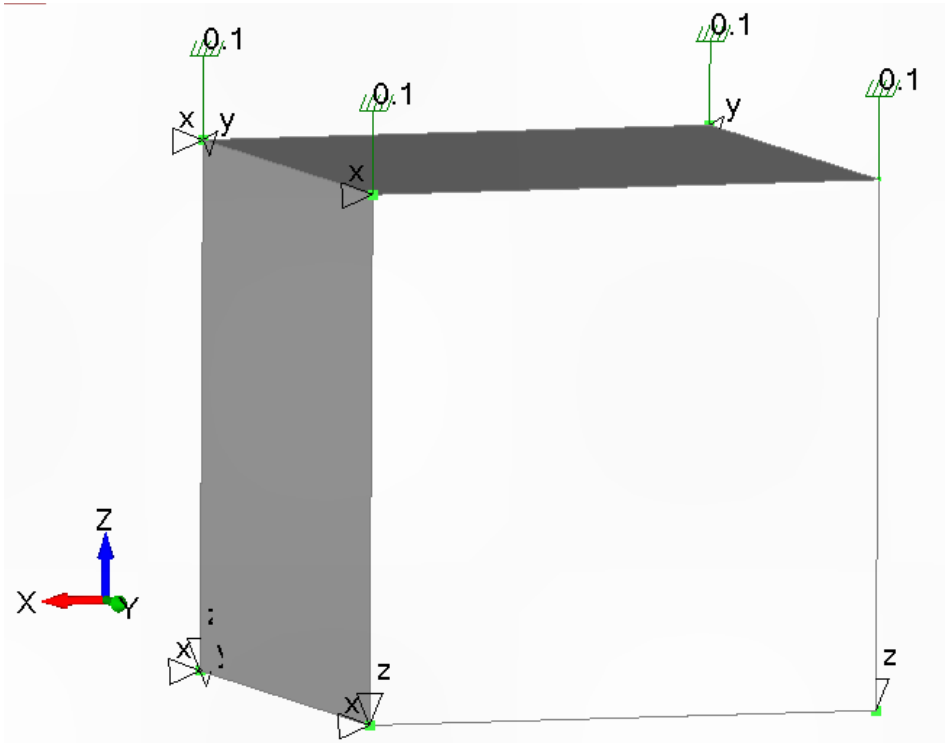
Слика: Поље оштећења за SENB епрувету на крају симулације

CT узорак

Слика: Поље оштећења за CT епувету на крају симулације

Псеудоеластичност SMA - 1 елемент

Јединична коцка оптерећена задатим померањима на једној страни, ограничена је са друге стране. Изотермални гранични услови су претпостављени при константној температури од $325K$.

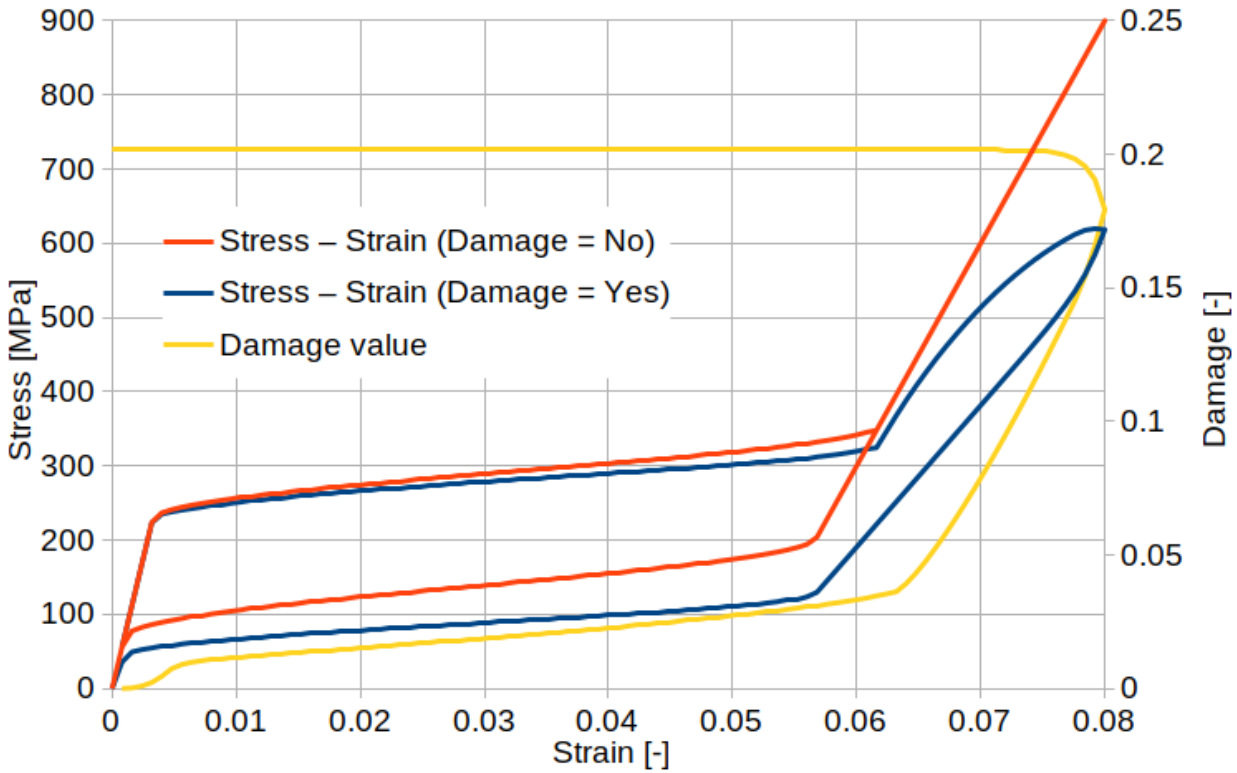


Слика: Гранични услови

Табела: Материјални параметри за SMA и МФП

E_A	E_M	α_A	α_M
70.000 MPa	30.000 MPa	$22.0 \cdot 10^{-6}\mathrm{K}^{-1}$	$22.0 \cdot 10^{-6}\mathrm{K}^{-1}$
T_{Ms}	T_{Mf}	T_{As}	T_{Af}
291K	271K	295K	315K
H_{max}	ν	$\rho\Delta s_A$	$\rho\Delta s_M$
0.05	0.33	-0.35 MPa K^{-1}	-0.35 MPa K^{-1}
l_c	G_V	tol	
$0.1mm$	$120MPa$	$1.e-7$	

Померања су задата у једном смеру у 100 корака и у исто толико у супротном смеру до максималне деформације од 8% да би био приказан утицај МФП симулације оштећења на зависност напон-деформација.



Слика: Напон-деформација са и без МФП оштећења

МФП симулација замора

- Примарни механизам настанка лома у конструкцијама изложеним цикличном оптерећењу је замор.
- Пукотине настају из микро-шупљина и микро-прслина које током даљег оптерећења расту и пропагирају, што доводи до лома.
- Заморни век је процењена зависност амплитуде цикличног оптерећења (напон или деформација) и броја циклуса у форми S-N криве.
- Код високоцикличног замора (high cyclic fatigue - HCF), материјал је изложен малој амплитуди у еластичном режиму, што води до великог броја циклуса до лома.
- Ниско-циклични замор (Low cycle fatigue - LCF) је поновљено оптерећивање материјала уз појаву пластичних деформација.
- Амплитуда оптерећења је изнад границе течења.
- Замор и лом настају после мањег броја циклуса у поређењу са HCF.

Функција замора

Закон еволуције фазног поља оштећења је потребно кориговати на следећи начин[10]:

$$f\left(\bar{\alpha}(t)\right) G_V \left[d - l_c^2 \nabla^2 d\right] + g'\left(d\right) \psi = 0 \tag{56}$$

где је $\bar{\alpha}(t)$ променљива која памти историју промене неке скаларне променљиве. За псеудо-време τ, ова променљива може бити дефинисана као:

$$\bar{\alpha}(t) = \int_0^t H(\alpha\dot{\alpha})|\dot{\alpha}| d\tau \tag{57}$$

где је $H(\alpha\dot{\alpha})$ Хевисајдова степ функција дефинисана као $H(\alpha\dot{\alpha}) = 1$ ако је $\alpha\dot{\alpha} \geq 0$ (оптерећење) и $H(\alpha\dot{\alpha}) = 0$ иначе (растерећење).

[1] Simoes, M, Braithwaite, C, Makaya, A, Martínez-Pañeda, E. Modelling fatigue crack growth in shape memory alloys. Fatigue Fract Eng Mater Struct. 2022; 45(4): 1243- 1257

- $\bar{\alpha}$ расте само током оптерећења.
- $\alpha = g(d)\psi$ је променљива историје замора која репрезентује стање у материјалу
- $f(\bar{\alpha}(t))$ је функција замора која карактерише осетљивост енергије лома на број циклуса.

$$f(\bar{\alpha}(t)) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \bar{\alpha} \leq \alpha_T \\ \left(\frac{2\alpha_T}{\bar{\alpha}(t)+\alpha_T}\right)^2 & \text{if} \quad \bar{\alpha} > \alpha_T \end{cases} \tag{58}$$

- α_T представља граничну вредност испод које енергија лома остаје нетакнута:

$$\alpha_T = \frac{G_V}{12} \tag{59}$$

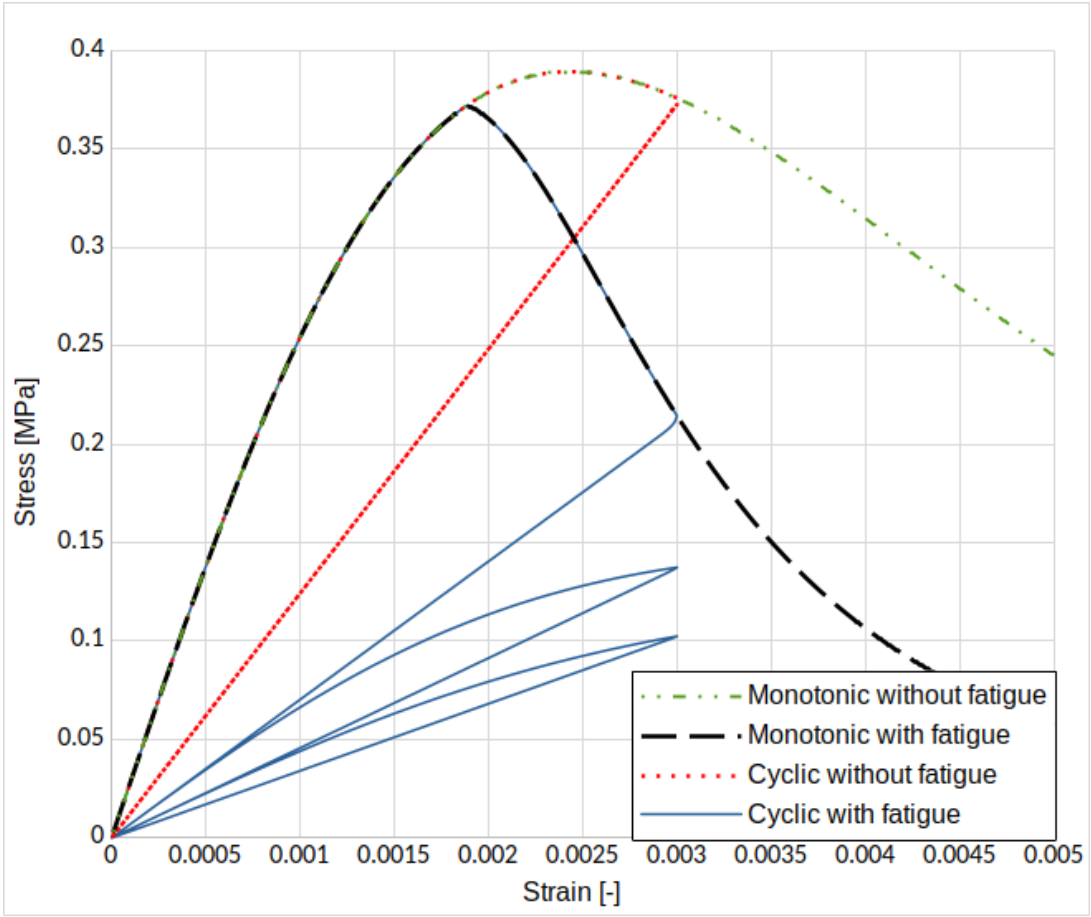
HCF

Гранични услови су исти као код примера псеудоеластичности за SMA.

Табела: Материјални параметри за ПФМ и еластичност

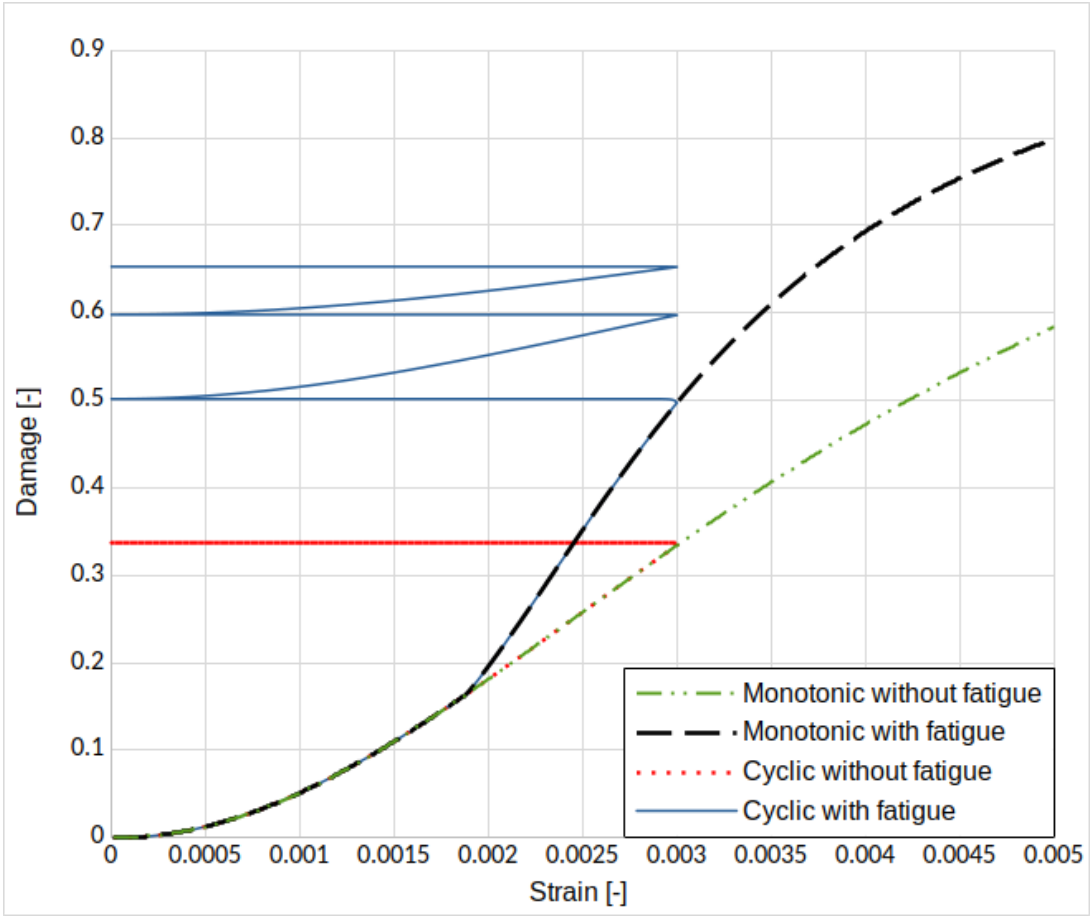
E	ν	G_V	l_c
210000 MPa	0.3	5 MPa	0.1 mm

Монотоно оптерећење је задато до укупне деформације од 1%
Две симулације су спроведене - са утицајем функције замора и без.
Након тога, три циклуса оптерећења и растерећења су спорведена за оба случаја до укупне деформације од 0.3%.



Слика: Напон-деформација за HCF[11]

[10] V.Dunic, M.Zivkovic, V.Milovanovic, J.Zivkovic, Phase-field modeling of high cyclic fatigue in brittle materials, IConSSM2024, V.Banja, 2023.



Слика: Оштећење-деформација за HCF[11]

[11] V.Dunic, M.Zivkovic, V.Milovanovic, J.Zivkovic, Phase-field modeling of high cyclic fatigue in brittle materials, IConSSM2024, V.Banja, 2023.

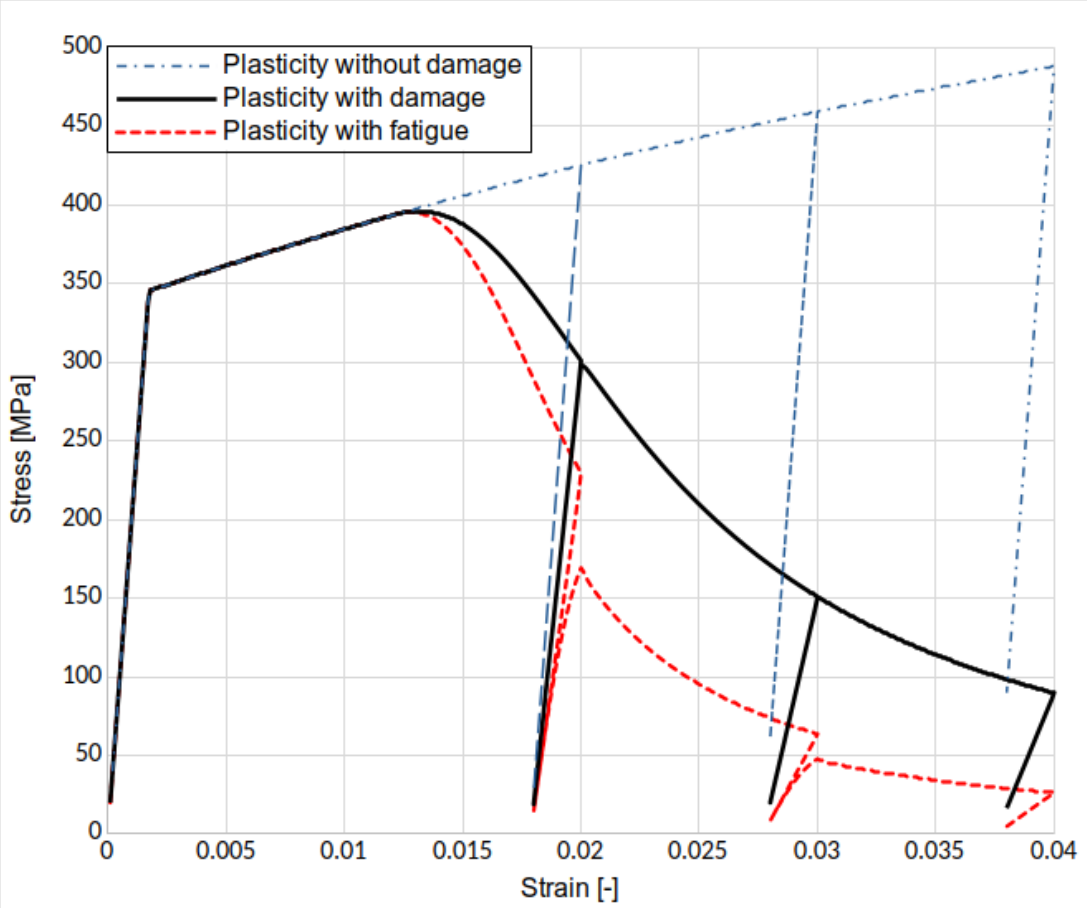
LCF

Гранични услови су исти као код примера псеудоеластичности за SMA.

Табела: Материјални параметри за МФП и еласто-пластичност

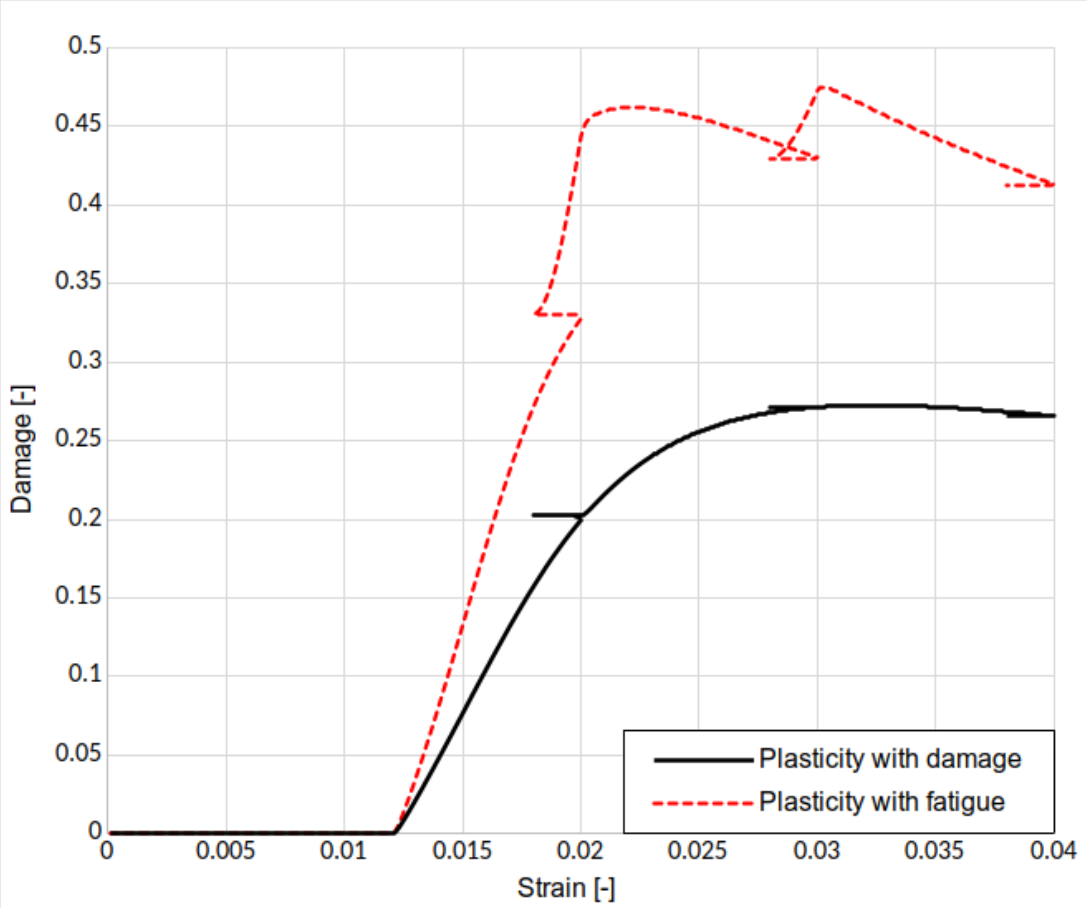
E	ν	G_V	l_c
199000 MPa	0.29	3.09 MPa	0.01 mm
σ_{y0}	$\sigma_{y\infty}$	H	n
345 MPa	635 MPa	9 MPa	18 [-]

Симулације су спроведене за Фон Мизесову пластичност и Симову функцију ојачања без МФП, само са МФП, и са МФП и функцијом замора.
Три циклуса оптерећења и растерећења су спроведена до укупне деформације: први циклус = 2%, други циклус = 3%, трежи циклус 4%.



Слика: Напон-деформација за LCF[12]

[10] V.Dunic, M.Zivkovic, V.Milovanovic, J.Zivkovic, Phase-field modeling of low cyclic fatigue in ductile materials, IConSSM2024, V.Banja, 2023.

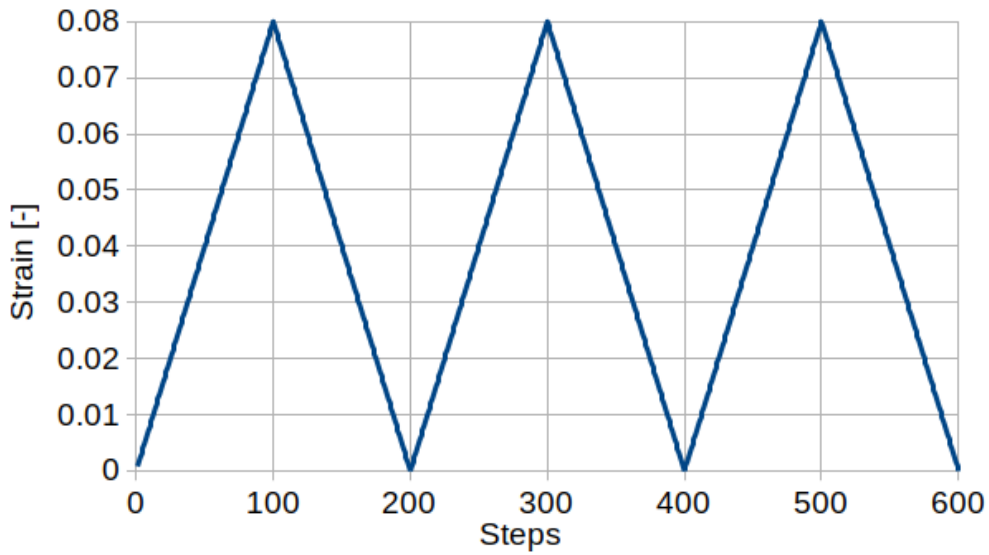


Слика: Оштећење-деформација за LCF[12]

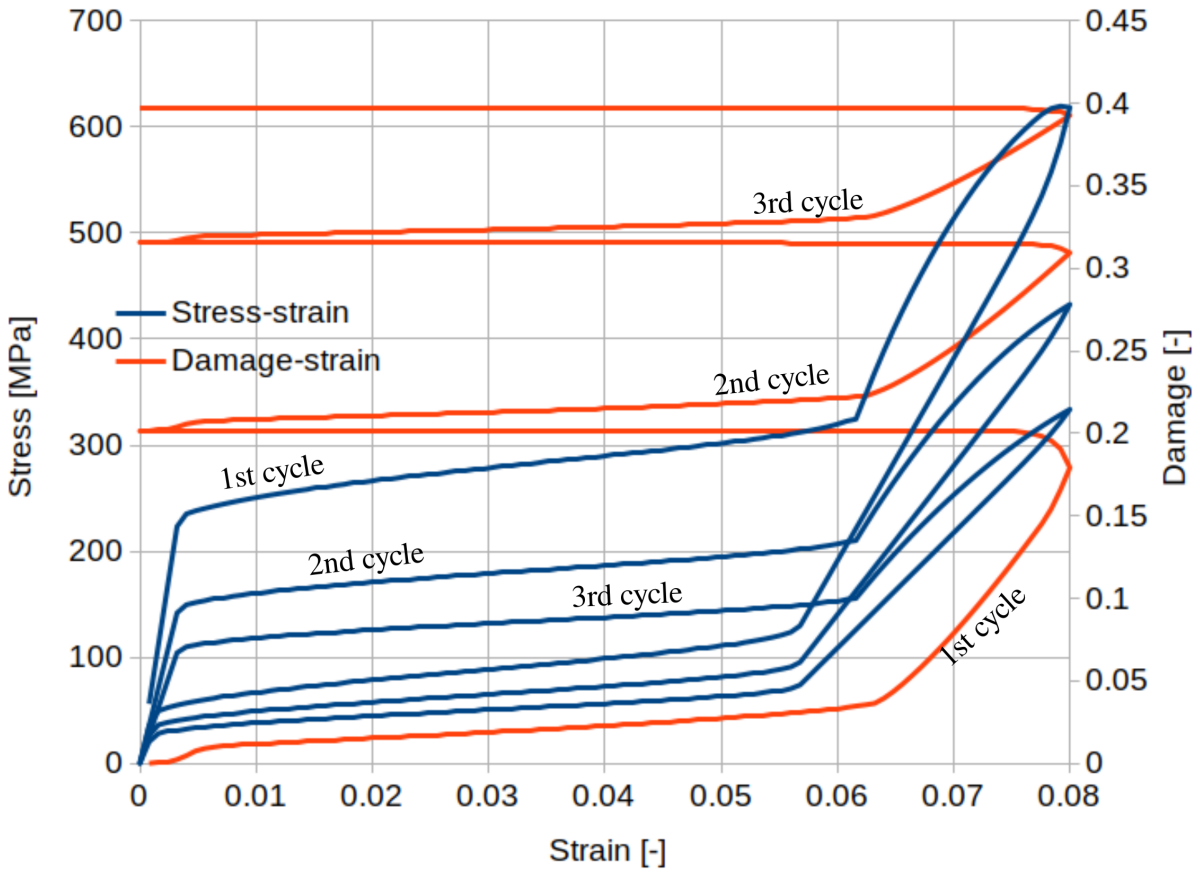
[12] V.Dunic, M.Zivkovic, V.Milovanovic, J.Zivkovic, Phase-field modeling of low cyclic fatigue in ductile materials, IConSSM2024, V.Banja, 2023.

SMA

Гранични услови су исти као код примера псеудоеластичности за SMA. Три циклуса оптерећења и растерећења су спроведена. Пример је решен у 600 корака.



Слика: Функција оптерећења за три циклуса оптерећења и растерећења



Слика: Напон-деформација vs оштећење-деформација - 3 циклуса[11]

[11] V.Dunic, R.Matsui, K.Takeda, M.Zivkovic, Phase-field damage simulation of subloop loading in TiNi SMA, to be published soon - SAKURA Exchange Program 2023

Закључци

- МФП је метода која се све чешће користи у МКЕ софтверима за прорачун оштећења и лома у конструкцијама
- Функција замора отвара могућност симулације акумулирања оштећења при цикличном померању и замора
- Фон Мизесова пластичност и Симова фукција ојачања са МФП и функцијом замора се успешно може користити за симулацију HCF и LCF,
- Оштећење има велики утицај на понашање материјала. Вредност оштећења дата на дијаграму показује да приближно 20% оштећења материјала даје огромну разлику у одзиву напон-деформација, што указује да не може и не сме бити занемарено,
- три циклуса оптерећења и растерећења до максималне укупне деформације од 8%, показују да оштећење наставља да расте током оптерећења и остаје константно током растерећења као што је и предложено у теорији.

Шта даље?

- Одређивање материјалних параметра за моделирање методом фазног поља и замора (G_V - критична брзина ослобађања енергије лома по јединици запремине, α_T - гранична вредност испод које енергија лома остаје нетакнута),
- Укључивање термо-механичке спреге у симулације , што је посебно значајно за SMA јер су изузетно термо-сензитивни,
- Испитивање утицаја нееластичне (пластичне али и мартензитне) енергије деформације на оштећење и замор,
- Имплементација зависности $G_V(\xi)$ од удела мартензита у запремини,
- Имплементација ефикаснијих солвера и убрзања прорачуна за циклична оптерећења.

Публикације

- Zivkovic, J., Dunic, V., Milovanovic, V., Pavlovic, A., Zivkovic, M. (2021) A Modified Phase-Field Damage Model for Metal Plasticity at Finite Strains: Numerical Development and Experimental Validation. Metals vol 11(1), pp. 47
- Dunic, V., Zivkovic, J., Milovanovic, V., Pavlovic, A., Radovanovic, A., Zivkovic, M. (2021) Two-Intervals Hardening Function in a Phase-Field Damage Model for the Simulation of Aluminum Alloy Ductile Behavior. Metals, vol 11(11), pp. 1685
- Jelena Živković, Унапређење, имплементација и експериментална верификација нумеричког моделирања оштећења и лома метала применом фазног моделирања, Факултет инжењерских наука Универзитета у Крагујевцу, 2022